Grup-1) 1) $x^3-3x-1=0$ denkleminin tam olarak üç tane kökü olduğunu gösteriniz.

2) (i) Ortalama değer teoremini ifade ediniz.
(ii) $x\geq 0$ için $\sin x\leq x$ olduğunu gösteriniz.

3) i) Bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için (türev) ortalama değer teoerimini ifade ediniz.
ii) $f:[2,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu için ortalama değer teoremini sağlayan noktayı bulunuz.

4) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sin x$ fonksiyonunun grafiğinin uç noktalarını birleştiren kirişine paralel teğeti var mıdır? Varsa teğetinin denklemini yazınız.

5) a) Bir f fonksiyonunun tanım kümesinin bir a iç noktasındaki türevini tanımlayınız. $y=\sqrt{x-1}$ fonksiyonunun $x>1$ için türev tanımını kullanarak türevini bulunuz.
b) $y=\sqrt{x-1}$ eğrisine teğet olan ve $(-3,0)$ noktasından geçen doğrunun demklemini bulunuz.

6) Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$ varsa, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$ olur. Kanıtlayınız

7) Kabul edelim ki $x\geq 0, y\geq 0$ ve $x+y=6$ olsun. $4x+y^2$'nin maksimum olması için x ve y değerleri ne olmalıdır?

8) $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2} g(t)dt$ ve $g(t)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{t}} h(u)du$ olsun. Eğer $h(1)=2$ ise $f''(1)$'i hesaplayınız.

9) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+4x+5}dx$ integralini hesaplayınız.

10) $\displaystyle\int_3^7 f(x)dx=20$ ise $\displaystyle\int_2^4 f(2x-1)dx$ integralini hesaplayınız.

11) $y=x^3$ eğrisi, $x=-2, x=4$ doğruları ve $x-$ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.

12) $f(u)=\displaystyle\int_1^{x^2}\frac{\sqrt{17+u^3}}{u}du$ olmak üzere $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ olarak tanımlanıyor. Buna göre $g''(2)=$?

13)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\arcsin x, & x\geq 0 \text{ ise}\\ x+e^{x^2}, & x<0 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. $x=0$ noktasında türevi mevcut ise $f'(0)$'ı bulunuz, değilse neden mevcut olmadığını açıklayınız.

14) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sürekli fonksiyon nedir tanımlayınız ve bir tane süreksiz fonksiyon örneği verip neden süreksiz olduğunu yaptığınız tanıma göre açıklayınız.

Grup-2) 1) i) Bir $f : A \to B$ fonksiyonu için $C \subset B$ kümesinin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(C)$ kümesini tanımlayınız.

ii) $C = [1, 2]$ kümesinin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

2) i) Birebirlik ve örtenliği tanımlayınız.

ii) $Y = \{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\}$ olsun. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'den Y kümesine birebir ve örten bir fonksiyon mudur? Açıklayınız.

3) Aşağıda verilenlerin bir fonksiyon olup olmadığını nedeni ile birlikte açıklayınız.

i) $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+x-2}$

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+2x+2}$

iii) $f : [0, 2] \to (-2, 5), \quad f(x) = 3x - 1$

4) a) Denklik bağıntısı nedir? Tanımlayınız.

b) Aşağıdaki bağıntıların denklik bağıntısı olup olmadığını inceleyiniz.

$*$ $\mathbb{R}$ üzerinde

$$xRy \iff x - y \in \mathbb{N}$$

$*$ $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ üzerinde

$$(a, b)R(c, d) \iff a.d = b.c$$

$*$ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerinde

$$xRy \iff 5 \mid x - y$$

5) $A = \{1, 2, 3, 6, 10, 18\}$ kümesi üzerinde $x \preceq y \iff x|y$ (x, y yi böler) ile tanımlı kısmi sıralama bağıntısı için Hasse diyagramını çizerek A kümesinin bu bağıntıya göre maksimum, maksimal,minimal,minimum elemanlarını (mevcut iseler) belirleyiniz.

6) Yalnızca birer tane $f : [-1, 1] \longrightarrow [-3, 4]$

a) Birebir fakat örten olmayan fonksiyon

b) Örten fakat birebir olmayan fonksiyon

c) Birebir ve örten fonksiyon örneği veriniz.

7) $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ fonksiyonu $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-3}$ şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyonunun birebir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.

8) Eğer varsa, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesine tanımlı, birebir ve örten bir fonksiyon örneği vererek fonksiyonunun birebir olduğunu gösteriniz. Eğer böyle bir fonksiyon yoksa neden mevcut olmadığını açıklayınız. (Not: $0 \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul ediniz.)

Grup-3) 1) $A(-1,2,-3)$ noktasından geçen ve $d=(-3,-1,1)$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik ve standart (simetrik) denklemlerini yazınız.

2) $P_1(1,2,3)$ noktasının

$$\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$$

doğrusuna göre simetrisi olan P_2 noktasının kordinatlarını bulunuz.

3)

$$\begin{cases} 3x+3y-2z &= 2 \\ -2x+y+3z &= 3 \\ 4x-2y+z &= -13 \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

4) $x-y+z-5=0$ ve $-2x+3y-z-1=0$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna dik olan ve A(-1,1,0) noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.

5) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{4}$ ve $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z+5}{9}$ doğrularının kesişim noktasını bulunuz.

6) $A(1,2,2)$ noktasının $x+2y+z=5$ düzlemine göre simetriği olan noktayı bulunuz.

6) Dik koordinat sisteminde a ve b vektörleri için $|a|=2$ ve $|b|=3$ veriliyor. a ve b vektörleri arasındaki açı $\dfrac{\pi}{3}$ radyan ise, $|a+2b|=$?

7) a) $a=(1,2,3)$, $b=(-2,5,-4)$ vektörlerinin her ikisine de dik olan bir vektör bulunuz.

   b) $a=(1,2,3)$ vektörünün $b=(-2,5,-4)$ vektörü üzerindeki dik izdüşümü olan vektörü bulunuz.

8) $y=-2x+7$ doğrusunun $(1,2)$ noktasına en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

Grup-4) 1) V n-boyutlu bir vektör uzayı ve $T : V \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. Ayrıca $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ birbirinden farklı T'nin özdeğerleri ve $E_1, E_2, \ldots, E_n$ vektörleri de sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olsun. Bu durumda $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz ve buradan bu kümenin V'nin bir tabanı olacağı sonucunu çıkarınız.

2) $\{(\alpha, \alpha, 1), (0, \alpha, 1), (\alpha, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ vektör kümesinin $\mathbb{R}^3$'ün bir tabanı olması için $\alpha \in \mathbb{R}$ hangi koşulu (veya koşulları sağlamalıdır?)

3) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü $\mathbb{R}^2$'nin $\{(3,1), (1,0)\}$ olarak seçilen tabanı üzerinden $T(3,1) = (0,1)$ ve $T(1,0) = (1,1)$ olarak veriliyor. Buna göre $T(3,3) =?$

4) V bir vektör uzayı, A ve B de bu vektör uzayının farklı iki alt uzayı olsunlar. Bu durumda aşağıdakileri cevaplayınız, iddianızı gösteriniz.

i $A \cap B$, V'nin bir alt uzayı mıdır?

ii $A \setminus B$, V'nin bir alt uzayı mıdır?

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve A matrisinin en küçük özdeğerine karşılık gelen bir özvektör bulunuz.

6) a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x = 5y\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir alt uzayı olup olmadığını belirleyiniz.

b) $\mathbb{Q}$ Rasyonel Sayılar kümesinin, $\mathbb{R}$ vektör uzayının bir alt uzayı olup olmadığını belirleyiniz.

7) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, T(x, y) = (x, x + y, x + 2y, x + 3y)$ lineer dönüşümü için $GorT$ (görüntü kümesi) alt uzayının boyutunu belirleyip, ilgili alt uzay için bir taban yazınız.

8) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü $\mathbb{R}^2$ nin $\{(1,-2), (3,1)\}$ tabanı üzerinden $T(1,-2) = (1,-1)$ ve $T(3,1) = (-2,0)$ olarak veriliyor. Buna göre $T(x, y) =?$

9) $\begin{cases} 3x + 3y - 2z = 2 \\ -2x + y + 3z = 3 \\ 4x - 2y + z = -13 \end{cases}$ sistemini hem Cramer yöntemiyle hem de sistemin genişletilmiş matrisini eşelon forma getirerek çözünüz.

10) V bir vektör uzayı, A ve B de bu vektör uzayının farklı iki alt uzayı olsunlar. Bu durumda aşağıdakileri cevaplayınız, iddianızı gösteriniz.

i) $A \cap B$, V'nin bir alt uzayı mıdır?

ii) $A \setminus B$, V'nin bir alt uzayı mıdır?

11) $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ ye bir lineer dönüşüm (sıfır ve birim dönüşümden farklı), bir de lineer olmayan dönüşüm örneği veriniz.

12)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin terslenebilir olduğunu gösteriniz ve uygun $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ skalerleri için $A^{-1} = c_2A^2 + c_1A + c_0I$ olduğunu kanıtlayınız.

13) $\mathbb{R}^3$ de $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ ve $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$ vektörleri tarafından gerilen alt uzayın elemanı olan ve $\mathbf{v}$ vektörüne dik olan bir $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vektörü bulunuz.

14) Uzayda herhangi bir vektör $(2, 0, 4), (-3, 1, -1)$ ve $(0, -5, -2)$ vektörlerinin bir lineer bileşkesi olarak yazılabilir mi? Açıklayınız.

15) (a) $a = e_1 + e_2 + e_3,\ b = e_1 + 2e_2 - e_3$ ve $c = 3e_1 + ke_2 + e_3$ vektörlerinin aynı düzlemde yer almaları için k ne olmalıdır?

(b) a ve b vektörlerine dik bir birim vektör yazınız. Sebebini açıklayınız.

16) Lineer bağımlılığı tanımlayıp $a = (1, -1, 0),\ b = (1, 3, -1)$ ve $c = (5, 3, -2)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını belirleyiniz.

17) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (x - y, x + 2y, x + 3y)$ lineer dönüşümünün $\mathbb{R}^2$ nin $\{(1, -1), (2, 0)\}$ ve $\mathbb{R}^3$ ün $\{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (1, 2, 2)\}$ sıralı tabanlarına göre matrisini yazınız.

18) Standart tabana göre matrisi $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ olan lineer dönüşümün köşegenleştirilebilir olup olmadığını inceleyiniz.

Grup-5) 1) Homeomorfizmin tanımını yapınız. $\mathbb{R}$ standart topolojik uzayının homeomorfik olan ve homeomorfik olmayan farklı alt uzay örnekleri verip sebebini kısaca açıklayınız.

2) $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ topolojisi göz önüne alınıyor. Bu topolojik uzay üzerinde tanımlı $f : X \to X$, fonksiyonu $f(a) = a$, $f(b) = a$, $f(c) = b$, $f(d) = d$, $f(e) = a$ şeklinde veriliyor. f fonksiyonunun sürekli olduğu noktaları belirleyiniz.

3) Topolojik uzay tanımını yapınız. $X \neq \emptyset$ ve

$$T = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \ : \ X - U \text{ sonlu}\}$$

olmak üzere (X, T) nun bir topolojik uzay olduğunu gösteriniz.

4) Metrik uzay tanımını yapınız ve $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde bir d metriği tanımlayıp (X, d) nin bir metrik uzay olduğunu gösteriniz.

5) (X, τ) bir Hausdorff uzayı, $A, B \subset X$ kompakt kümeler olsunlar. Bu durumda $A \cap B$ kümesinin de kompakt olduğunu gösteriniz.

6) $X = (-1, 1] \times [-1, 1]$ kümesi üzerinde $\mathbb{R}^2$ **standart topolojik uzayından indirgenen alt uzay topolojisi** alınıyor. Aşağıda verilen kümelerin bu uzayda açık veya kapalı olup olmadıklarını sebeplerini açıklayarak belirleyiniz:

   a) $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times [-1, 1]$
   b) $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-1, 1]$
   c) $B = (-1, 0] \times [-1, 0)$

7) $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde $\mathcal{T}(5) = \{U \subset \mathbb{R} | 5 \in U\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisi verilsin.

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}(5)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}(5)),$$

her $x \in \mathbb{R}$ için, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun sürekli olup olmadığını araştırınız.

8) Kompaktlık süreklilikle korunur mu? İspatlayınız.

9) Uygun gördüğünüz bir yöntemle gerçel sayılar kümesi üzerinde standart topolojiyi kurunuz.

10) Her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$d_\infty(x, y) = Max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlı d_∞ fonksiyonunun, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metrik olup olmadığını belirleyiniz.

Grup-6) 1) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi her $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ için

$$a * b = a + b + ab$$

olarak tanımlansın. $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ ikilisinin bir grup olup olmadığını belirleyiniz.

2) S_6 kümesinin $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ elemanları için

a) σ ve τ permütasyonlarının işaretini belirleyiniz.

b) $\sigma^{-2}\tau^2\sigma$ işlemini yapınız.

c) τ'nun ürettiği altgrubu belirleyiniz.

3) $y'' - 5y' + 6y = 2e^t, y(0) = 1, y'(0) = -1$ başlangıç değer problemini hem belirsiz katsayılar yöntemi hem de Laplace dönüşümü yardımıyla çözünüz.

4) $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{z + \overline{z}} & , \quad z \neq 0 \\ 0 & , \quad z = 0 \end{cases}$

fonksiyonunun $z = 0$ noktasında sürekli olup olmadığını araştırınız.

5) $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(z) = z^2$ dönüşümü altındaki $y = x$ doğrusunun görüntüsünü bulunuz ve grafiğini görüntü düzleminde çiziniz.