MAT117 Soyut Matematik I

2024-2025 Güz Dönemi Dönemsonu Sınav Soruları ve Yanıtları

08.01.2025

---

1) Keyfi $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ kümeler ailesi için

$$\begin{aligned} C_0 &= D_0 \\ C_k &= D_k \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} C_i\right) \text{ (her } k>0 \text{ için)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ kümeler ailesini göz önüne alalım. $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ olduğunu gösteriniz.

Yanıt: İki taraflı kapsama ile hemen görebiliriz. Ama çözümden önce soruyu biraz anlayalım. (Siz de lütfen böyle yapın, anlamadığınız soruyu çözemezsiniz!!!). Yani C_i ler nasıl kümeler onu anlayalım. İlk bir kaç kümeyi yazmak faydalı olur.

$$\begin{aligned} C_0 &= D_0 \text{ (bize verilen)} \\ C_1 &= D_1 \setminus C_0 = D_1 \setminus D_0 \\ C_2 &= D_2 \setminus (C_0 \cup C_1) = D_2 \setminus (D_0 \cup (D_1 \setminus D_0)) = D_2 \setminus D_1 \\ C_3 &= D_3 \setminus (C_0 \cup C_1 \cup C_2) = D_3 \setminus (D_0 \cup (D_1 \setminus D_0) \cup (D_2 \setminus D_1)) = D_3 \setminus D_2 \\ \vdots &= \vdots \\ C_n &= D_n \setminus D_{n-1} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu gözlemden sonra çözüme odaklanalım:

a.) İlk olarak $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ olduğunu görelim. $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ olsun. Bu durumda $\exists j \in \mathbb{N}$ öyle ki $x \in C_j$ olur. (Bileşimin tanımı). Bu ise $x \in D_j$ ve $x \notin \bigcup_{i=0}^{j-1} C_i$ anlamına gelir. Aslında bizim için önemli olan $x \in D_j$ olması çünkü x elemanı D_i lerin bir tanesine ait ise bileşime de aittir, yani $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ olur. Dolayısıyla $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ elde edilir.

b.) Şimdi diğer kapsamayı, yani $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ olduğunu görelim. Yine $y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ olsun. Bileşimin tanımından $\exists k \in \mathbb{N}$ öyleki $y \in D_k$ dır. Bu şekilde çok sayıda k doğal sayısı olabilir. Biz bu şekildeki k ların en küçüğünü alalım. Yani y sayısı için

$$y \notin D_0,\ y \notin D_1, \notin D_2, \ldots,\ y \notin D_{k-1} \text{ fakat } y \in D_k$$

olur. $y \in D_k$ ve $y \notin D_{k-1}$ olduğundan, yukarıda yaptığımız gözlemden $y \in D_k \setminus D_{k-1} = C_k$ olur. Buradan da $y \in \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i$ elde edilir.

2) $\beta_1, \beta_2 \subseteq X \times X$ denklik bağıntıları veriliyor. Buna göre,

a) $\beta_1^{-1}, \beta_1 \cup \beta_2$ ve $\beta_1 \cap \beta_2$ bağıntılarının denklik bağıntısı olup olmadığını inceleyiniz.

Yanıt: Önce adı geçen bağıntıları açık olarak yazalım:

- $\beta_1^{-1} := \{(a,b) \in X \times X \mid (b,a) \in \beta_1\}$,
- $\beta_1 \cup \beta_2 := \{(a,b) \in X \times X \mid (a,b) \in \beta_1$ ya da $(a,b) \in \beta_2\}$,
- $\beta_1 \cap \beta_2 := \{(a,b) \in X \times X \mid (a,b) \in \beta_1$ ve $(a,b) \in \beta_2\}$,

dir. Verilen üç bağıntının da yansıyan olduğu açıktır. Çünkü $\forall a \in X$ için $(a,a) \in \beta_1$ olduğundan $(a,a) \in \beta_1^{-1}$ dir. Aynı şekilde $(a,a) \in \beta_1, \beta_2$ olduğundan $(a,a) \in \beta_1 \cup \beta_2$ ve $(a,a) \in \beta_1 \cap \beta_2$ dir. Yine verilen üç bağıntı da simetriktir. Çünkü

* $(x,y) \in \beta_1^{-1}$ ise $(y,x) \in \beta_1$ (ters bağıntı tanımı, yukarıda da yazdık). β_1 simetrik olduğundan $(x,y) \in \beta_1$ dolayısıyla $(y,x) \in \beta_1^{-1}$ olur.
* Bileşim için ise: $(x,y) \in \beta_1 \cup \beta_2$ ise bileşimin tanımıdan $(x,y) \in \beta_1$ ya da $(x,y) \in \beta_2$ dir. Bu bağıntıların ikisi de simetrik olduğundan $(y,x) \in \beta_1$ ya da $(y,x) \in \beta_2$ dir. (Yani $(x,y) \in \beta_1$ ise $(y,x) \in \beta_1$ ve $(x,y) \in \beta_2$ ise $(y,x) \in \beta_2$ dir.). Dolayısıyla hangisi olursa olsun $(y,x) \in \beta_1 \cup \beta_2$ olur.
* Arakesite bakalım. $(x,y) \in \beta_1 \cap \beta_2$ olsun. Tanımdan $(x,y) \in \beta_1$ ve $(x,y) \in \beta_2$ dir. Bu bağıntılar da simetrik olduğundan $(y,x) \in \beta_1$ ve $(y,x) \in \beta_2$ dolayısıyla $(y,x) \in \beta_1 \cap \beta_2$ olur. Üç bağıntı da simetriktir.

Şimdi geçişkenliğe bakalım:

* $(x,y), (y,z) \in \beta_1^{-1}$ ise ters bağıntı tanımından $(y,x), (z,y) \in \beta_1$ dir. β_1 geçişken olduğundan $(z,x) \in \beta_1$ ve ters tanımından $(x,z) \in \beta_1^{-1}$ olur. Yani eğer bağıntı geçişken ise ters bağıntı da geçişkendir.
* Bileşim için ise $(x,y), (y,z) \in \beta_1 \cup \beta_2$ ise $(x,y) \in \beta_1$ ve $(y,z) \in \beta_2$ olmasında bir mahzur yoktur. Bu durumda ise bileşim geçişken olamaz. Örneğin $X := \{x,y,z\}$ ve $\beta_1 := \{(x,x), (y,y), (z,z), (x,y), (y,x)\}$ ve $\beta_2 := \{(x,x), (y,y), (z,z), (y,z), (z,y)\}$ olabilir. Bu iki bağıntı da kolayca görebileceğiniz gibi denklik bağıntısıdır. Ama bileşim olamaz, çünkü geçişken değildir. $(x,y), (y,z) \in \beta_1 \cup \beta_2$ olmasına karşın $(x,z) \notin \beta_1 \cup \beta_2$ dir. Sonuç olarak geçişken bağıntıların bileşimleri geçişken olmak zorunda değildir. Dolayısıyla denkilik bağıntıalrının bileşimi de denklik bağıntısı olmaz zorunda değildir.
* Arakesitde ise bileşimde oluşan durum mümkün değildir. $(x,y), (y,z) \in \beta_1 \cap \beta_2$ ise arakesit tanımından $(x,y), (y,z) \in \beta_1$ ve $(x,y), (y,z) \in \beta_2$ dir. Bu bağıntılarda geçişken olduğundan $(x,z) \in \beta_1$ ve $(x,z) \in \beta_2$ dolayısıyla $(x,z) \in \beta_1 \cap \beta_2$ olur.

Yukarıda verilen tatışmayı özetlecek olursak, β_1, β_2 bir X kümesi üzerinde iki denklik bağıntısı ise β_1^{-1} ve $\beta_1 \cap \beta_2$ bağıntıları da X de birer denklik bağıntısı ve $\beta_1 \cup \beta_2$ ise bir denklik bağıntısı olmak zorunda değildir.

b) $\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - x = y^2 - y\}$ denklik bağıntısı olmak üzere keyfi bir $a \in \mathbb{R}$ için $[a]$ denklik sınıfını belirleyiniz ve eleman sayısını bulunuz.

Yanıt: Bildiğiniz gibi a nın denklik sınıfı ya da denklik bölüğü

$$[a] := \{x \in \mathbb{R} \mid (a,x) \in \beta\}$$

şeklindeydi. Şimdi bu tanımı bize konu olan bağıntıya uygularsak

$$(a,x) \in \beta \;\Leftrightarrow\; x^2 - x = a^2 - a \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - a^2 + a = 0$$

dır. Bu son denklemi çözersek $x = a$ ve $x = 1 - a$ bulunur. Yani eğer $a \neq 1 - a$ ise a nın denklik sınıfı $[a] = \{a, 1-a\}$ bulunur. Eğer $a = 1 - a$ ise $a = \frac{1}{2}$ olur. Yani $\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ bulunur. Özetle

$$[a] := \begin{cases} \{a, 1-a\} & a \neq \frac{1}{2} \\ \left\{\frac{1}{2}\right\} & a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

olur. Devamla $a \neq \frac{1}{2}$ ise $[a]$ kümesi iki elemanlı ve $a = \frac{1}{2}$ ise $[a]$ kümesi tek elemanlıdır.

3) $X = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \{0,1\}\}$ olmak üzere

$$F : P(\mathbb{R}) \to X, \quad F(A)(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

($F(A) \in X$ olduğundan $F(A) : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ şeklinde tanımı yukarıda verilen fonksiyondur) şeklinde tanımlanan F fonksiyonunun tersini bulunuz.

Yanıt: Gerekli değil ama fonksiyonu yakından tanımak için 1-1 ve örten olduğunu görelim. 1-1 lik için bildiğiniz gibi $A, B \in P(\mathbb{R})$ için $F(A) = F(B)$ ise $A = B$ olduğunu görmeliyiz. Tanıma göre $F(A)$ ve $F(B)$ fonksiyondur, hatta $F(A), F(B) : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ ve tanımları soruda verildiği gibi $x \in \mathbb{R}$ için $F(A)(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ ve $F(B)(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ dir. Tanım ve değer kümeleri aynı ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $F(A)(x) = F(B)(x)$ olduğundan $F(A)^{-1}(1) = F(B)^{-1}(1)$ olmalıdır. (Ters fonksiyondan değil de $1 \in \{0,1\}$ in $F(A)$ ve $F(B)$ altında fonsiyonları altında ters görüntüsünden bahsediyoruz.). Buradan da $A = B$ elde edilir, çünkü $F(A)$ fonksiyonu altında 1 e giden elemanlar A kümesi ve $F(B)$ fonksiyonu altında 1 e giden elemanlar B kümesidir. Örtenlik için ise $f \in X$ için $F(C) = f$ olacak şekilde bir $C \in P(\mathbb{R})$ bulmalıyız. Fonksiyonun tanımı ile karşılaştırıldığında $C = f^{-1}(1)$ olduğu açıktır. Yani F fonksiyonu 1-1 ve örtendir. Tersi nasıl buluyorduk $F(x) = y$ denklemini çözerek, bizim soruda x yerine küme var bunu Z ile gösterelim ve $y : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ bir fonksiyon bunu da g ile gösterelim. O halde $F(Z) = g$ denkleminin çözümü yukarıda yaptığımız gibi $Z = g^{-1}(1)$ dir. O halde ters fonksiyon $F^{-1} : X \to P(\mathbb{R}), \quad F^{-1}(f) = f^{-1}(1)$ dir. (f de ki -1 ters görüntü anlamında).

4) a) Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz ve nedenlerini bir cümle ile açıklayınız.

i) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x\, [(x^2 = -1) \Rightarrow (x > 0)]$.

Yanıt: Gerçel sayılarda $x^2 = -1$ olacak şekilde bir x olmadığı için kontrol edilecek bir şey de yoktur. Bu önerme doğrudur.

ii) $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\exists x \forall y \left[\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{Z}\right]$.

Yanıt: $x = 0 \in \mathbb{Z}$ alınırsa $y \in \mathbb{Z}$ ne olursa olsun $\sqrt{x^2 + y^2} = |y| \in \mathbb{Z}$ olduğundan bu önerme de doğrudur.

b) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)$ önermesinin değilini yazınız.

Yanıt: Önce şu gözlemi yapalım: $p \Rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$ denkliği kolayca doğruluk tablosu ile

p	q	$p \Rightarrow p$	$(\sim p) \vee q$
D	D	D	D
D	Y	Y	Y
Y	D	D	D
Y	Y	D	D

görülebilir. Bu gözlemden sonra De Morgan kuralı yardımıyla

$$\sim [(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)] \equiv \sim [\sim (p \vee q) \vee (p \wedge r)] \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p) \vee (\sim r)$$

$$\equiv q \vee [(p \vee q) \wedge (\sim r)] \equiv [q \vee (p \vee q)] \wedge [q \vee (\sim r)] \equiv (p \vee q)[q \vee (\sim r)] \equiv \sim ((\sim p) \vee r) \vee q \equiv (\sim p \vee r) \Rightarrow q \tag{1}$$

5) a) $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x \leq 60\}$ kümesi üzerinde $\beta = \{(x, y) : x \mid y \;\; \textit{(x, y'yi tam böler)}\} \subseteq X \times X$ şeklinde tanımlı β sıralama bağıntısının (varsa) büyükçe, küçükçe, en büyük ve en küçük elemanlarını bulunuz.

Yanıt: $a, b \in X$ için $a \leq b \;\Leftrightarrow\; (a, b) \in \beta \;\Leftrightarrow\; a|b$ olduğundan 30 dan büyük sayıların hepsi büyükçedir. Çünkü 30 dan büyük sayının en küçük katı (2 katı) 60 dan büyüktür. Öte yandan 30 dan eşit-küçük bir sayının iki katı 60 dan eşit-küçük olduğu için 30 dan eşit küçük hiçbir sayı büyükçe olamaz. En büyük öğede büyükçe öğeler arasında olacağından 30 dan büyük iki sayı aldığımızda bu iki sayıdan biri diğerinden büyük olamaz, çünkü biribirlerini bölmezler. O halde bir en büyük öğe yoktur. Diğer yandan bir asal sayının da 1 den ve kendisinden başka böleni olmadığından 60 dan küçük bütün asal sayılar küçükçedir. Devamla en küçük öğe de küçükçe öğeler arasında olduğundan (X deki asal sayılar) ve iki asal sayının birinin diğerini bölmesi de söz konusu olmadığından en küçük öğe yoktur. Özetle

$$\text{Büyükçe öğeler} = \{31, 32, 33, 34, 35, \ldots, 56, 57, 58, 59, 60\}$$

$$\text{Küçükçe öğeler} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53, 59\}$$

b) $A = \{p \in X \mid p \textit{ asal sayı}\} \subset X$ kümesinin (varsa) alt sınırları kümesini, üst sınırları kümesini, ebas ve ekusünü bulunuz.

Yanıt: Kolayca görebileceğiniz gibi A kümesinin ne üst sınırı ne de bir alt sınırı vardır, dolayısıyla bu kümenin eküs ve ebası yoktur. A kümesinin bir üst sınırı A kümesi 60 dan küçük asal sayılardan oluştuğu için bu kümenin bir üst sınırı 60 dan küçük asal sayıların bir ortak katıdır. Fakat bu ortak kat da 60 dan büyük olacağındandan üst sınırlar kümesi boş kümedir. Alt sınırlar kümesi ise bu asal sayıların bir ortak bölenidir. Kümede 1 olmadığından bir ortak bölen de bulunamaz, yani alt sınıralr kümesi de boş kümedir. Dolayısıyla hem abas her de eküs yoktur.

Not: Her soru eşit puan olup sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar dilerim.