MAT117 Soyut Matematik I

2024-2025 Güz Dönemi I.Ara Sınav Soruları ve Yanıtları

---

1) Her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için **(25 p.)**

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

eşitliğini tümevarım yöntemi ile kanıtlayınız.

Yanıt: $n = 1$ için önerme

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \;\Rightarrow n = 1 \text{ için } \; 1.1! = 2! - 1$$

halini alır ki, doğrudur. Şimdi $n = r$ için önermenin doğru olduğunu varsayıp $n = r + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\sum_{k=1}^{r} k \cdot k! = (r+1)! - 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{r+1} k \cdot k! = ((r+1)+1)! - 1$$

olduğunu kanıtlayacağız. Kanıtlanacak eşitliğin sol yanı ile başlayalım:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{r} k \cdot k! + (r+1) \cdot (r+1)! \\
&= [(r+1)! - 1] + (r+1) \cdot (r+1)! \text{ (tümevarım varsayımını kullandık)} \\
&= (r+1)!(r+2) - 1 \\
&= (r+2)! - 1
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi amaç eşitliğin sol yanını da elde ettik. O halde soruda verilen eşitlik doğrudur.

2) Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini belirleyip, değillerini yazınız. **(25 p.)**

i) $\exists x\ \exists y\ [x + 2y = 3]$

Yanıt: Eşitliği sağlayan bir tane x ve bir tane y bulmak yeterlidir. $x = 3, y = 0$ için eşitlik sağlanır, yani önerme doğrudur. Önermenin değili için ise

$$\sim \{\exists x\ \exists y\ [x + 2y = 3]\} \equiv \forall x\ \forall y\ [x + 2y \neq 3]$$

dır.

ii) $\forall x\ \exists y\ [x^2 + y^2 \neq 3]$

Yanıt: Bunun için de her x için (en az) bir tane y bulmalıyız öyleki eşitsizlik doğru olur. Gerçektende keyfi $a \in \mathbb{R}$ için $x = a$ ve $y = 2$ alınırsa $x^2 + y^2 = a^2 + 4 \geq 4 > 3$ olduğundan eşitsizlik sağlanır, yani önerme doğrudur. Önermenin değili için ise

$$\sim \left\{\forall x\ \exists y\ [x^2 + y^2 \neq 3]\right\} \equiv \exists x\ \forall y\ [x^2 + y^2 = 3]$$

olur.

iii) $\forall x\ \forall y\ [2x + 3y + 5 = 0]$

Yanıt: Bu soruda ise her x her y için eşitlik sağlanır diyor, apaçık olarak bu yanlıştır. Bir tane örnek vermek yeterlidir: $x = y = 0$ alınırsa eşitliğin sağlanmadığı görülür. Önermenin değili ise:

$$\sim \{\forall x\ \forall y\ [2x + 3y + 5 = 0]\} \equiv \exists x\ \exists y\ [2x + 3y + 5 \neq 0]$$

b) "Bir x gerçel sayısı ve her y gerçel sayısı için $(3 - x)(y^2 + 1) > 0$'dır." önermesini uygun niceleyiciler kullanarak simgesel olarak ifade ediniz ve önermenin doğruluk değerini belirleyiniz.

Yanıt: Niceleyicilerle önerme gerçel sayılar kümesinde $\exists x\ \forall y\ [(3 - x)(y^2 + 1) > 0]$ dır. Apaçık olarak bu önerme doğrudur, çünkü $x = 0$ (bir tane x vermek yeterli) için y ne olursa olsun $3(y^2 + 1) > 0$ dır.

a) A, B ve C kümeleri verilsin. $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$ olduğunu kanıtlayınız. **(25 p.)**

Yanıt: Eşitliği iki taraflı kapsama ile gösterelim, yani $A\backslash(B\backslash C) \subseteq (A\backslash B) \cup (A \cap C)$ ve $(A\backslash B) \cup (A \cap C) \subseteq A\backslash(B\backslash C)$ olduğunu gösterirsek eşitlik elde edilmiş olur. Şimdi $A\backslash(B\backslash C) \subseteq (A\backslash B) \cup (A \cap C)$ olduğunu görelim:

$$
\begin{aligned}
& x \in A\backslash(B\backslash C) \text{ olsun} \\
\Rightarrow\ & x \in A \text{ ve } x \notin B\backslash C \\
\Rightarrow\ & x \in A \text{ ve } (x \notin B \text{ ya da } x \in C) \\
\Rightarrow\ & (x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ ya da } (x \in A \text{ ve } x \in C) \\
\Rightarrow\ & x \in A\backslash B \text{ ya da } x \in A \cap C \\
\Rightarrow\ & x \in (A\backslash B) \cup (A \cap B
\end{aligned}
$$

olur. O halde $A\backslash(B\backslash C) \subseteq (A\backslash B) \cup (A \cap C)$ kapsaması doğrudur. Şimdi $(A\backslash B) \cup (A \cap C) \subseteq A\backslash(B\backslash C)$ kapsamasını görelim.

$$
\begin{aligned}
& x \in (A\backslash B) \cup (A \cap C) \text{ olsun} \\
\Rightarrow\ & x \in A\backslash B \text{ ya da } x \in A \cap C \\
\Rightarrow\ & (x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ ya da } (x \in A \text{ ve } x \in C)) \\
\Rightarrow\ & x \in A \text{ ve } (x \notin B \text{ ya da } x \in C) \\
\Rightarrow\ & x \in A \text{ ve } x \notin B\backslash C \\
\Rightarrow\ & x \in A\backslash(B\backslash C)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Her iki kapsama da kanıtlandığından

$$A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$$

eşitliği bulunmuş olur.

b) $[p \wedge (q \vee r)] \vee [(p\wedge \sim q) \vee (p \wedge r)] \equiv p$ eşdeğerliğini kanıtlayınız.

Yanıt: Önerme özelliklerini kullanarak çözelim: (Doğruluk çizelgesi ile de yapılabilir ama biz kısalık için bunu tercih ettik.)

$$
\begin{aligned}
[p \wedge (q \vee r)] \vee [(p\wedge \sim q) \vee (p \wedge r)] &\equiv [p \wedge (q \vee r)] \vee [p \wedge (\sim q \vee r)] \\
&\equiv p \wedge [(q \vee r) \vee (\sim q \vee r)] \\
&\equiv p \wedge [(q\vee \sim q \vee r) \\
&\equiv p \wedge \mathrm{D} \ (q\vee \sim q \equiv \mathrm{D} \text{ eşitliği her zaman doğru olduğundan}) \\
&\equiv p
\end{aligned}
$$

4) $A_n = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1\} \subseteq \mathbb{N}$ ve $B_n = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n\} \subseteq \mathbb{N}$ kümeleri verilsin. **(25 p.)**

Buna göre aşağıdaki kümeleri belirleyiniz.

Ayrıntılı çözüme başlamadan önce A_n ve B_n kümelerini tanıyacak olursak. Keyfi n doğal sayısı için A_n kümesi 1 den $2n-1$ e kadar olan tek doğal sayılar kümesi ve B_n de 2 den $2n$ ye kadar olan çift doğal sayılar kümesidir. Buna göre $m \leq n$ için $A_m \subseteq A_n$ ve $B_m \subseteq B_n$ kapasamaları geçerlidir. Yani

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset \ldots .. A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$$

ve

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4 \subset \ldots .. B_n \subset B_{n+1} \subset \ldots$$

şeklindedir.

a) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Yanıt: Apaçık olarak bu küme tüm A_n lerin kapasadığı kümedir, bu ise yukarıda A_n lerin sıralanışından da görüleceği gibi A_1 dir. Yani $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1$ dir.

b) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

Yanıt: Bu küme de B_n lerin sıralanışından görüleceği gibi bütün çift doğal sayılar kümesidir. Çift doğal sayılar kümesini $2\mathbb{N}$ ile gösterecek olursak $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = 2\mathbb{N}$ dir. Şimdi bu eşitliği kanıtlayalım. $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ olsun. Bileşimin tanımından, uygun $k \in \mathbb{N}$ için $x \in B_k$ olur. Bu durumda $\exists l \leq k$ öyleki $x = 2l$ dir. O halde x bir çift doğal sayıdır, yani $x \in 2\mathbb{N}$ olur. Tersine $y \in 2\mathbb{N}$ olsun. Çift doğal sayı tanımından $\exists t \in \mathbb{N}$ öyleki $y = 2t$ dir. Tanımdan göründüğü gibi $y = 2t \in B_t$ olduğundan $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ olur. Bu iki kapsamadan eşitlik görülür.

c) $A_5 \cap B_7$

Yanıt: Bu soruda verilen bir n için A_n ve B_n kümelerini yazıp üzerinde işlem yapma hakkındadır. $n = 5$ için $A_5 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ve $n = 7$ için $B_7 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ kümeleri olduğu apaçıktır. Bu iki kümenin ortak elemanları kümesi ise boş kümedir.

Not: Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.